Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2019/2020

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 6

Ausgabe: 20.11.2019
Abgabe: 27.11.2019

Aufgabe 6.1. (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $c = 1+\varepsilon$ für irgendein $0 < \varepsilon < 0,001$. Die folgenden 8 Punkte in der Ebene, mit den gewöhnlichen Euklidschen Distanzen, definieren eine Instanz für das Problem 2-Median:

$$K = \{A = (0,0), B = (c,0), C = (2c,0), D = (0,1), E = (2c,1), F = (0,2), G = (c,2), H = (2c,2)\}.$$

Finde eine *lokal* optimale Lösung $M \subset K$ für 2-Median mit der 2-Flip-Nachbarschaft, die nicht global optimal ist. Begründe deine Antwort.

Hinweis: In Berechnungen darf ε vernachlässigt werden, wo seine Größe nicht entscheidend ist.

b) Entferne die Eingabepunkte D und E aus der Eingabe aus Teil a). Finde nun eine *lokal* optimale Lösung für 2-Center mit der 2-Flip-Nachbarschaft, die nicht global optimal ist. Begründe deine Antwort.

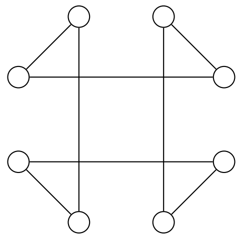
c) Wir betrachten die lokale Suche für das (ungewichtete) Vertex-Cover-Problem mit der 1-Flip-Nachbarschaft. In der Vorlesung zeigten wir, dass der Sterngraph zwei lokale Minima besitzt. Betrachte nun für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ einen Weg mit $n = 3k$ Knoten als Eingabe.

Gib eine kurze und präzise Beschreibung *aller* lokalen Minima an. Welche dieser Lösungen approximiert das Optimum am schlechtesten?

Bitte wenden!

Aufgabe 6.2. *Lokale Suche für* TSP (2 + 2 + 2 Punkte)

Wir betrachten ein regelmäßiges Achteck als Eingabe für das *euklidische* TSP. Die Anfangslösung y_0 einer lokalen Suche sei wie folgt gegeben:



Finde eine kürzeste *Nachbarlösung* dieser Rundreise in der ...

a) ... 4-Flip-Nachbarschaft von y_0,

b) ... 6-Flip-Nachbarschaft von y_0,

c) ... 8-Flip-Nachbarschaft von y_0.

Hinweis: Eine Begründung der Lösung ist *nicht* erforderlich. Ein $2k$-Flip-Nachbar von y_0 ist jede Lösung, die durch Löschen und Hinzufügen von jeweils k Kanten entsteht.

Aufgabe 6.3. ((1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ zwei beliebige Punkte in der Ebene. **Beschreibe** die Position der folgenden Punkte kurz und präzise:

i) $\dfrac{a+b}{2}$ ii) $\dfrac{a+2b}{3}$

b) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für zwei beliebige Punkte $a, b \in K$ das verbindende Geradenstück $\{\lambda a + (1-\lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ auch vollständig in K enthalten ist.

Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Welche der folgenden Mengen sind in jedem Fall konvex?

i) $K_1 \cup K_2$ ii) $K_1 \cap K_2$ iii) $\overline{K}_1 = \mathbb{R}^n \setminus K_1$ iv) $K_1 \setminus K_2$ v) $K_2 \setminus \overline{K}_1$

Gib jeweils eine *kurze* Begründung oder skizziere ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^2$.